۱- متغیر های تصادفی را حقیقی می گیریم.

$$P = E(S - \hat{S})^2 = E(S - a - bX - CX^2)^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial a} = 0 \Rightarrow E[-2(S - a - bX - CX^2)] = 0 \ \Rightarrow a + b\bar{X} + c\overline{X^2} = \bar{S}$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} = 0 \Rightarrow E[-2X(S - a - bX - CX^2)] = 0 \ \Rightarrow a\bar{X} + b\overline{X^2} + c\overline{X^3} = \overline{SX}$$

$$\frac{\partial P}{\partial c} = 0 \Rightarrow E[-2X^2(S - a - bX - CX^2)] = 0 \ \Rightarrow a\overline{X^2} + b\overline{X^3} + c\overline{X^4} = \overline{SX^2}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{X} & \overline{X^2} \\ \bar{X} & \overline{X^2} & \overline{X^3} \\ \overline{X^2} & \overline{X^3} & \overline{X^4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{S} \\ \overline{SX} \\ \overline{SX^2} \end{pmatrix}$$

تخمین خطی به ممان های مرتبه اول و دوم نیاز داشت. ملاحظه می گردد تخمین درجه دوم به ممان های تا درجه چهارم نیاز دارد.

۲-

الف) مولفه های بردار سفید متعامد هستند و روشن است که هیچکدام نمی توانند کمکی به تخمین خطی دیگری کنند. لذا

$$\hat{E}(W_3|W_2, W_1) = 0, \hat{E}(W_4|W_2, W_1) = 0$$

در نتیجه

$$\hat{P}(W_3|W_2, W_1) = E(W_3 - 0)^2 = 1$$

$$\hat{P}(W_4|W_2, W_1) = E(W_4 - 0)^2 = 1$$

دو مقدار بالا به دلیل این که بردار W نرمالیزه می باشد برابر یک می باشند.

$$S_1 = 6W_1 + 2W_2 + 3W_3 \ \Rightarrow \hat{E}(S_1|W_1, W_2) = \hat{E}(6W_1 + 2W_2 + 3W_3|W_1, W_2)$$
$$= 6W_1 + 2W_2 + 3\hat{E}(W_3|W_1, W_2) = 6W_1 + 2W_2 + \ 0$$

به همین ترتیب

$$S_2 = W_1 + 6W_2 + 2W_3 + 3W_4 \ \Rightarrow \hat{E}(S_2|W_1, W_2) = W_1 + 6W_2 + 0 + 0$$

$$S_3 = W_2 + 6W_3 + 2W_4 \ \Rightarrow \hat{E}(S_3|W_1, W_2) = \hat{E}(W_2 + 6W_3 + 2W_4|W_1, W_2) = W_2 + 0 + 0$$

$$S_4 = W_3 + 6W_4 \ \Rightarrow \hat{E}(S_4|W_1, W_2) = \hat{E}(W_3 + 6W_4|W_1, W_2) = 0 + 0$$

$$P = E \parallel S - \hat{S} \parallel^2 = E \parallel \begin{pmatrix} S_1 - 6W_1 - 2W_2 \\ S_2 - W_1 - 6W_2 \\ S_3 - W_2 \\ S_4 \end{pmatrix} \parallel^2 = E \parallel \begin{pmatrix} 3W_3 \\ 2W_3 + 3W_4 \\ 6W_3 + 2W_4 \\ W_3 + 6W_4 \end{pmatrix} \parallel^2$$

$$= E(|3W_3|^2 + |2W_3 + 3W_4|^2 + |6W_3 + 2W_4|^2 + |W_3 + 6W_4|^2) = 99$$

۳-

$$\hat{S}(t) = \hat{E}(S(t)|X_1(\alpha), X_2(\alpha), \alpha \epsilon\ R) = h_1(t) * X_1(t) + h_2(t) * X_2(t)$$

که ترکیبی خطی از کلیه داده ها است. چون حدود مشاهده از $-\infty$ تا $+\infty$ است، $h_1(t)$ و $h_2(t)$ می توانند از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه داشته باشند. شرط تعامد را می نویسیم.

$$\begin{cases} S(t) - \hat{S}(t) \ \perp X_1(t - \tau), \forall \tau \epsilon\ R \ \Rightarrow R_{SX_1}(\tau) = R_{\hat{S}X_1}(\tau) \\ S(t) - \hat{S}(t) \ \perp X_2(t - \tau), \forall \tau \epsilon\ R \Rightarrow R_{SX_2}(\tau) = R_{\hat{S}X_2}(\tau) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{SX_1}(\tau) = h_1(\tau) * R_{X_1}(\tau) + h_2(\tau) * R_{X_2X_1}(\tau), \forall \tau \epsilon\ R \\ R_{SX_2}(\tau) = h_1(\tau) * R_{X_1X_2}(\tau) + h_2(\tau) * R_{X_2}(\tau), \forall \tau \epsilon\ R \end{cases}$$

$$\xrightarrow{Fourier\ Transform} \begin{cases} S_{SX_1}(f) = H_1(f)S_{X_1}(f) + H_2(f)S_{X_2X_1}(f) \\ S_{SX_2}(f) = H_1(f)S_{X_1X_2}(f) + H_2(f)S_{X_2}(f) \end{cases}$$

دو معادله و دو مجهول داریم:

$$H_1(f) = \frac{S_{SX_1}(f)S_{X_2}(f) - S_{SX_2}(f)S_{X_2X_1}(f)}{S_{X_1}(f)S_{X_2}(f) - |S_{X_1X_2}(f)|^2}$$

$$H_2(f) = \frac{S_{SX_2}(f)S_{X_1}(f) - S_{SX_1}(f)S_{X_1X_2}(f)}{S_{X_1}(f)S_{X_2}(f) - |S_{X_1X_2}(f)|^2}$$

ب)

در این حال داریم

$$\begin{cases} S_{SX_1}(f) = S_{SX_2}(f) = S_{X_1X_2}(f) = S_{X_2X_1}(f) = S_S(f) \\ S_{X_1}(f) = S_S(f) + S_{V_1}(f) \quad , \quad S_{X_2}(f) = S_S(f) + S_{V_2}(f) \end{cases}$$

جایگزین می کنیم

$$H_1(f) = \frac{S_S(f)S_{V_1}(f)}{S_S(f)S_{V_1}(f) + S_S(f)S_{V_2}(f) + S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}$$

$$H_2(f) = \frac{S_S(f)S_{V_2}(f)}{S_S(f)S_{V_1}(f) + S_S(f)S_{V_2}(f) + S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}$$

$$P = E\left(S(t) - \hat{S}(t)\right)S^*(t) = R_S(0) - R_{\hat{S}S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_S(f) - S_{\hat{S}S}(f)\right)df$$

$$S_S(f) - S_{\hat{S}S}(f) = S_S(f) - \left[H_1(f)S_{X_1S}(f) + H_2(f)S_{X_2S}(f)\right] = S_S(f)[1 - H_1(f) - H_2(f)]$$
$$= S_S(f)\frac{S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}{S_S(f)S_{V_1}(f) + S_S(f)S_{V_2}(f) + S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_S(f)S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}{S_S(f)S_{V_1}(f) + S_S(f)S_{V_2}(f) + S_{V_1}(f)S_{V_2}(f)}df$$

-۴

$$Z - \widehat{Z} \perp S(0) \Rightarrow \int_0^T R_s(t)dt - a\,R_s(0) - bR_s(T) = 0$$

$$Z - \widehat{Z} \perp S(T) \Rightarrow \int_0^T R_s(t-T)dt - a\,R_s(-T) - bR_s(0) = 0$$

برای فرایند های حقیقی $R_s(\tau) = R_s(-\tau)$ و لذا

$$\begin{cases} aR_s(0) + bR_s(T) = \int_0^T R_s(t)dt \\ aR_s(T) + bR_s(0) = \int_0^T R_s(t)dt \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{\int_0^T R_s(t)dt}{R_s(0) + R_s(T)}$$

۵- برای $\tau > 0$

$$\hat{E}[S(t+\lambda)|S(t), S(t-\tau)] = \hat{E}[S(t+\lambda)|S(t)] = aS(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(t+\lambda) - aS(t) \perp S(t) \\ S(t+\lambda) - aS(t) \perp S(t-\tau) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_s(\lambda) = aR_s(0) \\ R_s(\lambda+\tau) = aR_s(\tau) \end{cases}$$

پس می‌توان نوشت

$$R_s(\lambda+\tau) = \frac{R_s(\lambda)}{R_s(0)} R_s(\tau), \qquad \tau > 0$$

نسبت به λ مشتق می گیریم و بجای λ مقدار $\lambda = 0^+$ قرار می دهیم.

$$R_s{}'(\tau) = \frac{R_s{}'(0^+)}{R_s(0)} R_s(\tau)$$

با فرض $\frac{R_s{}'(0^+)}{R_s(0)} = -\alpha$ که در آن α عدد مثبتی می‌باشد.(چون حداکثر $R_s(\tau)$ در مبدا است پس در مبدا نزولی است).

$$R_s{}'(\tau) + \alpha R_s(\tau) = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل}} R_s(\tau) = ke^{-\alpha\tau}, \tau > 0$$

با تبدیل τ به $-\tau$ و با توجه به تقارن هرمیتیک تابع همبستگی $R_s(-\tau) = R_s{}^*(\tau)$ خواهیم داشت.

$$R_s(-\tau) = ke^{\alpha\tau}, -\tau > 0 \Rightarrow R_s{}^*(\tau) = ke^{\alpha\tau}, \tau < 0 \Rightarrow R_s(\tau) = ke^{\alpha\tau}, \tau < 0$$

این دو ضابطه را می توان با یک ضابطه هم نمایش داد.

$$R_s(\tau) = ke^{-\alpha|\tau|}$$

۶-

$$X_n = Y_n + Y_{n-1} + \cdots + Y_1 = Y_n + X_{n-1} = \text{نمونه قبلی} + \text{نمو}$$

$$E\{X_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1\}$$
$$= E\{Y_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1\} + x_{n-1}$$

$$= E\{Y_n\} + x_{n-1} = x_{n-1}$$

چرا که دو پیشامد زیر معادل هستند و Y_i ها نیز مستقل هستند و لذا شرط روی امید ریاضی اول حذف می شود.

$$\{X_{n-1}=x_{n-1}, X_{n-2}=x_{n-2}, \dots, X_1=x_1\} \equiv \{Y_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}, Y_{n-2}=x_{n-2}-x_{n-3}, \dots, Y_2 = x_2-x_1, Y_1=x_1\}$$

۷-

اگر مارتینگل به مفهوم وسیع باشد داریم.

$$X_n - X_{n-1} \perp X_i, i=1,2,\dots,n-1$$

اگر $Y_1 = X_1$ تعریف شود و نمو از X_{i-1} تا X_i را $Y_i \triangleq X_i - X_{i-1}$ بنامیم داریم .

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

$$\begin{cases} X_n - X_{n-1} \perp X_1 = Y_1 & \Rightarrow Y_n \perp Y_1 \\ X_n - X_{n-1} \perp X_2 = Y_1 + Y_2 & \Rightarrow Y_n \perp Y_2 \\ X_n - X_{n-1} \perp X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3 & \Rightarrow Y_n \perp Y_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

حال فرض می کنیم شرط تعامد فوق برقرار باشد در این صورت

$$Y_n \perp Y_1 \qquad \Rightarrow X_n - X_{n-1} \perp X_1$$

$$Y_n \perp Y_2 \qquad \Rightarrow Y_n \perp Y_1 + Y_2 \Rightarrow X_n - X_{n-1} \perp Y_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$Y_n \perp Y_{n-1} \qquad \Rightarrow Y_n \perp Y_{n-1} + Y_{n-2} + \cdots + Y_1 \Rightarrow X_n - X_{n-1} \perp X_{n-1}$$

پس

$$\hat{E}(X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1) = X_{n-1}$$

ب)

$$EX_n{}^2 = E(X_n - X_{n-1} + X_{n-1})^2 = EX_{n-1}{}^2 + E(X_n - X_{n-1})^2 + 2E[(X_{n-1})(X_n - X_{n-1})]$$

جمله سوم طبق بند الف صفر است و لذا

$$EX_n{}^2 = EX_{n-1}{}^2 + E(X_n - X_{n-1})^2 \geq EX_{n-1}{}^2$$

۸-

$$H_1(f) = \frac{S_{SX}(f)}{S_X(f)} = \frac{S_S(f)}{N + S_S(f)}$$

$$R_s(\tau) = Aa^2 sinc^2\left(\frac{a\tau}{\pi}\right) \Rightarrow\ S_S(f) = Aa\pi \wedge (\frac{\pi f}{a}) \Rightarrow H_1(f) = \frac{\wedge (\frac{\pi f}{a})}{\wedge\left(\frac{\pi f}{a}\right) + \frac{N}{Aa\pi}}$$

$$H_2(f) = \frac{S_{S'X}(f)}{S_X(f)} = \frac{j2\pi f S_{SX}(f)}{S_X(f)} = \frac{j2\pi f S_S(f)}{N+S_S(f)} \Rightarrow H_2(f) = \frac{j2\pi f \wedge (\frac{\pi f}{a})}{\wedge\left(\frac{\pi f}{a}\right) + \frac{N}{Aa\pi}}$$

-۹

$$s = j2\pi f$$

$$S_s(f) = \frac{1}{1+s^4} = \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}s+s^2\right)\left(1-\sqrt{2}s+s^2\right)} = L_s(f)L_s(f)^*$$

باید جواب مینیمم فاز انتخاب شود یعنی

$$\Rightarrow \mathrm{L_s(f)} = \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\mathrm{s}+\mathrm{s}^2\right)} = \frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{s}-\rho_1} + \frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{s}-\rho_2}, \rho_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \mathrm{j}\sqrt{2}}{2}, \mathrm{r}_{1,2} = \mp \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$l_s(t) = (r_1 e^{\rho_1 t} + r_2 e^{\rho_2 t})U(t)$$

$$\mathrm{h_w(t)} = \{\mathrm{l_s(t+\lambda)}\}_{\geq 0} = \left\{\left(\mathrm{r_1 e^{\rho_1(t+\lambda)} + r_2 e^{\rho_2(t+\lambda)}}\right)\mathrm{U(t+\lambda)}\right\}_{\geq 0} = \left(\mathrm{r_1 e^{\rho_1 t} e^{\rho_1\lambda} + r_2 e^{\rho_2 t} e^{\rho_2\lambda}}\right)\mathrm{U(t)}$$

$$H(f) = \Gamma_s(f)H_w(f) = \left(1+\sqrt{2}s+s^2\right)\left[\frac{r_1 e^{\rho_1\lambda}}{s-\rho_1} + \frac{r_2 e^{\rho_2\lambda}}{s-\rho_2}\right]$$
$$= -r_1\rho_2 e^{\rho_1\lambda} - r_2\rho_1 e^{\rho_2\lambda} + \left(r_1 e^{\rho_1\lambda} + r_2 e^{\rho_2\lambda}\right)s = b_0 + b_1 s = b_0 + b_1 j2\pi f$$

در نتیجه

$$h(t) = b_0\delta(t) + b_1\delta'(t) \Rightarrow \hat{S}(t+\lambda) = h(t) * s(t) = b_0 s(t) + b_1 s'(t)$$

که در آن

$$b_0 = -r_1\rho_2 e^{\rho_1\lambda} - r_2\rho_1 e^{\rho_2\lambda} = e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}(cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}})$$

$$b_1 = r_1 e^{\rho_1\lambda} + r_2 e^{\rho_2\lambda} = \sqrt{2}e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

-۱۰

مدل خطی با نویز سفید است.

$$S_s(z) = \frac{1.8}{(1-.8z)(1-.8z^{-1})} \Rightarrow S_X(z) = N_0 + \frac{1.8}{(1-.8z)(1-.8z^{-1})} = \frac{8(1-.5z)(1-.5z^{-1})}{(1-.8z)(1-.8z^{-1})}$$
$$= L_X(z)L_X{}^*(z^{-1})$$

$$L_X(z) = \frac{\sqrt{8}(1-.5z^{-1})}{(1-.8z^{-1})}, l_X(n) = \sqrt{8}\left[\frac{5}{8}\delta(n) + \frac{3}{8}(.8)^n u(n)\right]$$

$$L_s(z) = \frac{\sqrt{1.8}}{(1-.8z^{-1})}, l_s(n) = \sqrt{1.8}(.8)^n u(n)$$

الف)

$$H(z) = \frac{S_{SX}(z)}{S_X(z)} = \frac{2.25}{(1-.5z^{-1})(1-.5z)} \Rightarrow h(n) = .3(2)^{-|n|} \Rightarrow \hat{S}(n)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} .3\,(2)^{-|k|} X(n-k)$$

$$P_{min} = N_0 h(0) = 1.5$$

ب)

$$H(z) = 1 - N_0 \Gamma_X{}^*(\infty)\Gamma_X(z) = \frac{.375}{(1-.5z^{-1})} \Rightarrow h(n) = .375(2)^{-n}u(n) \Rightarrow$$

$$\hat{S}(n) = h(n) * X(n) = .375 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} X(n-k), P_{min} = N_0 h(0) = 1.875$$

از بند الف بیشتر است که طبیعی است.

ج)

$$h_w(n) = \{l_s(n+1)\}_{\geq 0} = \sqrt{1.8}(0.8)^{n+1}u(n), H_w(z) = \frac{\sqrt{1.8}\,0.8}{1-.8Z^{-1}}$$

$$H(z) = \Gamma_S(z)H_w(z) = \frac{1-.8Z^{-1}}{\sqrt{1.8}} \frac{\sqrt{1.8}\,0.8}{1-.8Z^{-1}} = .8 \Rightarrow h(n) = .8\delta(n) \Rightarrow \hat{S}(n+1) = 0.8S(n)$$

$$P_{min} = |P_s(0)|^2 = 1.8$$

د)

$$h_W(n) = \{l_X(n+1)\}_{\geq 0} = \sqrt{8}\frac{3}{8}(.8)^{n+1}u(n), H_W(z) = \frac{.3\sqrt{8}}{(1-.8z^{-1})}$$

$$H(z) = \Gamma_X(z)H_W(z) = \frac{.3}{(1-.5Z^{-1})} \Rightarrow h(n) = .3(2)^{-n}u(n)$$

$$\hat{S}(n+1) = .3\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}X(n-k), P_{min} = -N_0 + \sum_{k=0}^{\infty}|l_X(k)|^2 = -5+8 = 3$$

طبیعی است که از سه حالت بیشتر است.

۱۱-

فیلتر وینر علی مورد نظر است. با توجه به این که مدل خطی با نویز سفید در نظر گرفته شده است می توان نوشت.

$$H(f) = 1 - N\Gamma_X{}^*(\infty)\Gamma_X(f)$$

$$S_X(f) = N + S_S(f) = N + \frac{4\lambda}{4\lambda^2+4\pi^2f^2} = \frac{(4\lambda^2N+4\lambda)+4\pi^2f^2N}{4\lambda^2+4\pi^2f^2} = N\frac{c^2+4\pi^2f^2}{4\lambda^2+4\pi^2f^2}$$
$$= \frac{1}{\Gamma_X(f)\Gamma_X{}^*(f)}$$

جواب مینیمم فاز

$$\Gamma_X(f) = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{2\lambda+j2\pi f}{c+j2\pi f} \Rightarrow H(f) = 1 - \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N}}\frac{2\lambda+j2\pi f}{c+j2\pi f} = \frac{c-2\lambda}{c+j2\pi f} \Rightarrow$$
$$h(t) = (c-2\lambda)e^{-ct}u(t)$$

$$\hat{S}(t) = h(t) * X(t) = (c-2\lambda)\int_{\alpha=0}^{\infty} e^{-c\alpha}X(t-\alpha)d\alpha$$

در روابط فوق $c^2 = 4\lambda^2 + \frac{4\lambda}{N}$ است یعنی $c = 2\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda N}}$

۱۲- مدل خطی با نویز سفید است.

$$S_s(f) = \frac{2}{.04+(2\pi f)^2} = L_s(f)L_s(f)^*$$

$$S_X(f) = N_0 + S_s(f) = \frac{2.2+5(2\pi f)^2}{.04+(2\pi f)^2} = L_X(f)L_X(f)^*$$

$$L_s(f) = \frac{\sqrt{2}}{.2+j2\pi f} \quad \Rightarrow \quad l_s(t) = \sqrt{2}e^{-.2t}\,u(t)$$

$$L_X(f) = \sqrt{5}\frac{\sqrt{.44} + j2\pi f}{.2 + j2\pi f} = \sqrt{5}[1 + \frac{\sqrt{.44} - .2}{.2 + j2\pi f}] \Rightarrow \quad l_X(t)$$
$$= \sqrt{5}[\delta(t) + \left(\sqrt{.44} - .2\right)e^{-.2t}u(t)]$$

الف) فیلتر وینر غیر علی

$$H(f) = \frac{S_{SX}(f)}{S_X(f)} = \frac{S_S(f)}{S_X(f)} = \frac{2}{2.2 + 20\pi^2 f^2} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{\sqrt{11}}e^{-\sqrt{.44}|t|}$$

$$\hat{S}(t) = h(t) * X(t) = \frac{1}{\sqrt{11}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{.44}|\alpha|}X(t-\alpha)d\alpha \qquad , P_{min} = N_0 h(0) = 1.51$$

ب)فیلتر وینر علی

$$H(f) = 1 - N_0 {\Gamma_X}^*(\infty)\Gamma_X(f) = 1 - \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{.2 + j2\pi f}{\sqrt{.44} + j2\pi f} = \frac{\sqrt{.44} - .2}{\sqrt{.44} + j2\pi f}$$

$$h(t) = \left(\sqrt{.44} - .2\right)e^{-\sqrt{.44}t}u(t) \Rightarrow \hat{S}(t) = (\sqrt{.44} - .2)\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{.44}\alpha}X(t-\alpha)d\alpha \, , P_{min} = N_0 h(0)$$
$$= 2.31$$

ج) پیشگویی خالص $\lambda = 2$ ثانیه بعد

$$h_W(t) = \{l_s(t+2)\}_{\geq 0} = \sqrt{2}e^{-.2(t+2)}u(t)$$

$$H(f) = H_W(f)\Gamma_S(f) = \sqrt{2}e^{-.4}\frac{1}{.2 + j2\pi f}\frac{.2 + j2\pi f}{\sqrt{2}} = e^{-.4} \Rightarrow h(t) = e^{-.4}\delta(t)$$

$$\hat{S}(t+2) = h(t) * S(t) = e^{-.4}S(t) \qquad , P_{min} = \int_0^2 |l_s(t)|^2 dt = (\sqrt{2})^2\int_0^2 e^{-.4t}dt = 2.75$$

د)فیلترینگ + $\lambda = 2$ ثانیه پیشگویی

$$h_W(t) = \{l_X(t+2)\}_{\geq 0} = \sqrt{5}\left(\sqrt{.44} - .2\right)e^{-.2(t+2)}u(t)$$

$$H(f) = \Gamma_X(f)H_W(f) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{.2 + j2\pi f}{\sqrt{.44} + j2\pi f}\sqrt{5}\left(\sqrt{.44} - .2\right)e^{-.4}\frac{1}{.2 + j2\pi f} = \frac{.3106}{\sqrt{.44} + j2\pi f}$$

$$h(t) = .3106e^{-\sqrt{.44}t}u(t) \Rightarrow \hat{S}(t+2) = .3106\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{.44}t}X(t-\alpha)d\alpha\,,$$

$$P_{min} = R_s(0) - \int_2^{\infty} |l_X(t)|^2 dt = 3.79$$

از هر سه حالت قبل بیشتر است و این طبیعی است.

۱۳- با توجه به این که همه ریشه های معادله AR داخل دایره واحد است فیلتری که فرایندی $V(n)$ را به فرایند $S(n)$ تبدیل میکند یک فیلتر علی خواهد بود. اگر پاسخ ضربه این فیلتر را $h(n)$ بنامیم میتوان نوشت.

$$S(n) = h(n) * V(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)V(n-k) = h(0)V(n) + h(1)V(n-1) + h(2)V(n-2) + \cdots$$

$$\Rightarrow S(n-i) = h(0)V(n-i) + h(1)V(n-1-i) + h(2)V(n-2-i) + \cdots$$

به ازای $i \geq 1$ تمام جملات سمت راست بر $V(n)$ عمود است پس مجموع آنها یعنی $S(n-i)$ نیز به ازای $i \geq 1$ بر $V(n)$ عمود است یعنی

$$V(n) \perp S(n-1), S(n-2), S(n-3), \ldots$$

ب) کافی است اصل تعامد را چک کنیم

$$S(n) - \hat{S}_1(n) = S(n) + \sum_{i=1}^{N} a_i S(n-i) = b_0(n)V(n) \perp S(n-1), S(n-2), S(n-3), \ldots$$

ج) باز هم کافیست اصل تعامد را چک کنیم.

$$S(n) - \hat{S}_2(n) = S(n) + a_1\hat{S}_1(n-1) + \sum_{i=2}^{N} a_i S(n-i)$$

$$= b_0V(n) - a_1S(n-1) + a_1\hat{S}_1(n-1) + b_0V(n) + a_1\left[S(n-1) - \hat{S}_1(n-1)\right]$$

جمله اول یعنی $b_0\mathrm{V(n)}$ که طبق بند الف بر $S(n-2)$ و $S(n-3)$ و ... عمود است جمله دوم نیز یکقدم پیشگویی است که بر داده های مربوطه یعنی $S(n-2)$ و $S(n-3)$ و ... عمود است. پس اصل تعامد صادق است.